ENSEÑANZA DEL ALGEBRA LINEAL PARA ALUMNOS DE INGENIERÍA AERONÁUTICA: EXPERIENCIA MOTIVADORA

Viviana A. Costa[1], Ana Scarabino[2], Martín I. Idiart[3], Marcos Knoblauch[4]

Abstract *— El Álgebra Lineal es una disciplina cuya enseñanza y aprendizaje no es sencilla. Es de contenidos en general abstractos y de difícil comprensión por parte de los alumnos en todas las disciplinas de la enseñanza: Ciencias e Ingeniería. Por ello es importante para un mejor aprendizaje, motivar los contenidos desde la geometría y desde las aplicaciones a las distintas especialidades. En este trabajo hacemos una reseña sobre la enseñanza del Álgebra Lineal en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata. Exponemos diversas e interesantes aplicaciones de las Transformaciones Lineales en el campo de la Ingeniería Aeronáutica y relatamos una experiencia interdisciplinaria entre Profesores de la asignatura Álgebra Lineal (Área Básica) y Profesores del Área Tecnológica de la carrera Ingeniería Aeronáutica, cuyo objetivo fue el de motivar a los alumnos en el estudio de estos temas.*

Index Terms **—** *Algebra Lineal, enseñanza y aprendizaje, Ingeniería Aeronáutica, interdisciplinaridad.*

INTRODUCCIÓN

Las aplicaciones del Álgebra Lineal a las Ciencias y a la Ingeniería son vastas y amplias. En distintas ramas de la Ingeniería estas aplicaciones aparecen naturalmente de dos formas:

- Se utilizan para diagonalizar un tensor de segundo orden de magnitudes vectoriales físicas, todas con las mismas dimensiones. En estos casos los autovectores y los autovalores asociados tienen significados físicos concretos: son direcciones principales del tensor con magnitudes iguales o proporcionales a los autovalores correspondientes.

[1] IMAPEC, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP, 1 y 47, La Plata, Buenos Aires, Argentina, vacosta@ing.unlp.edu.ar
[2] Departamento de Aeronáutica, Facultad de Ingeniería, UNLP, 1 y 47, La Plata, Buenos Aires, Argentina, scarabino@ing.unlp.edu.ar
[3] Departamento de Aeronáutica, Facultad de Ingeniería, UNLP, 1 y 47, La Plata, Buenos Aires, Argentina, CONICET, Avda. Rivadavia 1917, Cdad. de Buenos Aires C1033AAJ, Argentina., martin.idiart@ing.unlp.edu.ar
[4] Departamento de Aeronáutica, Facultad de Ingeniería, UNLP, 1 y 47, La Plata, Buenos Aires, Argentina, marcos.knoblauch@ing.unlp.edu.ar

- Un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas puede escribirse en forma matricial, con las incógnitas conformando un vector cuyas componentes no necesariamente tienen las mismas dimensiones. Los autovalores de la matriz del sistema pueden brindar información sobre la estabilidad o inestabilidad del mismo, sobre las frecuencias naturales del sistema dinámico y sobre sus posibles modos de oscilación.

El dominio conceptual y práctico de las herramientas del Algebra Lineal por parte del alumno de las carreras de Ingeniería, en particular Aeronáutica, es indispensable para su correcta aplicación en la resolución de problemas de todo tipo.

El Ingeniero Aeronáutico se caracteriza por los desafíos que debe enfrentar en un área donde la optimización es crítica y fundamental en relaciones como peso/potencia, peso/resistencia, costo/carga útil. Mientras que en otras ramas de la ingeniería las incertidumbres tolerables pueden ser mayores, usando factores de seguridad elevados -y aumentando con ello el costo- en el diseño de un sistema, las restricciones de pesos y costos implícitas en Aeronáutica, sumadas a las altas exigencias en materia de seguridad, demandan del ingeniero un profundo conocimiento teórico de las variables involucradas en cada problema y en las metodologías de solución disponibles.

La enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal no es sencilla. Ha cambiado en los últimos años, principalmente por las problemáticas encontradas en los alumnos debido a las dificultades conceptuales y al tipo de pensamiento abstracto requerido para la compresión de los temas. En los años '90, David Carlson y colaboradores proponen apartarse de la abstracción y acercarse a un curso más concreto, basado en matrices [2]. Varios grupos de investigadores están trabajando actualmente sobre la didáctica del Algebra Lineal. Entre ellos un grupo francés liderado por Jean Luc Dorier, un grupo canadiense liderado por Anna Sierpinska, y un grupo norteamericano liderado por Guershon Harel.

En particular, las investigaciones de Harel nos sugieren una progresiva aproximación al Algebra Lineal de acuerdo a tres principios pedagógicos: Principio de Concretización, Principio de Necesidad y el Principio de Generalizabilidad. Específicamente el Principio de Necesidad, dice que, "*Para que los estudiantes aprendan, ellos deben ver una necesidad (intelectual) por lo cual piensan que son enseñados*" - está basado en la asunción Piagetiana que ese conocimiento es desarrollado como una solución a un problema [6].

Es importante para el Profesor de Álgebra Lineal conocer el perfil de sus alumnos a la hora de presentar actividades motivadoras prestando atención al interés de los alumnos. El profesor tiene que estimular a los estudiantes. Desde esta perspectiva las actividades propuestas juegan un papel fundamental en el aprendizaje. Carlson recomienda esto entre otros puntos [1].

En este trabajo hacemos una descripción de la asignatura Álgebra Lineal en la Facultad de Ingeniería de la UNLP (FI UNLP), "Matemática C", en contenidos, su metodología de trabajo en el aula y sus objetivos, y presentamos una actividad interdisciplinaria, destinada a los alumnos, desarrollada por Profesores de la carrera Ingeniería Aeronáutica, sobre las aplicaciones del Álgebra Lineal a la Ingeniería, formando también esto una articulación entre el Área Básica y el Área Tecnológica / Aplicada.

ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL EN LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNLP

Los planes de estudio tienen el objetivo de integrar las asignaturas de matemática con el resto de las áreas y materias, mejorar el rendimiento de los estudiantes en dichas asignaturas y disminuir la dificultad de éstos en recuperar los conceptos matemáticos en otros contextos. El esquema se basa en la organización de los contenidos alrededor de ejes conceptuales comunes y en la redistribución de los recursos existentes a fin de mejorar la calidad de la enseñanza impartida. Se define, un trayecto básico de matemática, integrado por tres materias consecutivas, dos de Cálculo Diferencial e Integral en una y varias variables, Matemática A y B, primer y segundo semestre, y la tercera que incluye los contenidos básicos de Álgebra Lineal y Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, Matemática C, tercer semestre[5].

Esta última, contempla lo analítico y lo numérico como un todo. Se utilizan libros de autores como D. Poole, D. C. Lay; que siguen las recomendaciones dadas por el grupo Linear Algebra Curriculum Study Group, se emplean sistemas de algebra por computadora, como ser MAPLE Y/O MATLAB, para enriquecer la experiencia de aprendizaje, mejorar la comprensión y visualización de algunos conceptos. Se da importancia a la conceptualización, a las aplicaciones y a las gráficas.

[5] http://www.ing.unlp.edu.ar/fismat/

La metodología con que se desarrolla el curso se basa en concebir al aprendizaje como un proceso. El alumno es un constructor del conocimiento y no solo un mero receptor. El alumno aprende desde sus ideas y estructuras previas. Aprender es adquirir significados.

El objetivo es proporcionar al alumno las habilidades algebraicas para resolver problemas que surjan en sus áreas de estudio y complementar el desarrollo analítico con los algoritmos numéricos. Establecer las conexiones entre los conceptos básicos de la teoría de matrices, de espacios vectoriales, de sistemas de ecuaciones lineales y de transformaciones lineales e introducir los conceptos de valor y vector propio aplicados en la resolución de problemas.

EXPERIENCIA MOTIVADORA

Realizamos una experiencia en la que participaron los profesores y los alumnos de Matemática C - Área Básica y Profesores de Mecánica Racional y de Mecánica de los Fluidos - Área Tecnológica. La experiencia consistió en una presentación multimedia, que incluye texto, animaciones, videos y gráficos. Esta fue concebida, desarrollada e implementada como una actividad de articulación y una estrategia metodológica motivadora para el aprendizaje. La presentación ejemplifica en detalle diversas aplicaciones de los autovalores y autovectores y de las transformaciones lineales en la Ingeniería Aeronáutica. A continuación describimos alguna de ellas.

Tensiones en sólidos o fluidos

Cuando sobre un cuerpo en equilibrio actúan fuerzas exteriores, cada elemento material del mismo está sometido a fuerzas interiores ejercidas por los elementos adyacentes. Estas fuerzas interiores se transmiten a través de la superficie de contacto entre los elementos; la fuerza por unidad de área se denomina tracción [3-13]. El vector tracción que un elemento dado ejerce sobre otro adyacente es función de la orientación espacial de la superficie de contacto. Puede demostrarse que dicha dependencia es lineal, es decir, que el vector tracción $\vec{T}$ está dado por $\vec{T} = \sigma \vec{n}$, donde $\vec{n}$ es el vector normal a la superficie y σ es el "tensor de tensiones". Este tensor constituye una transformación lineal que actúa sobre el vector normal a la superficie y devuelve el vector tracción correspondiente [Figura 1].

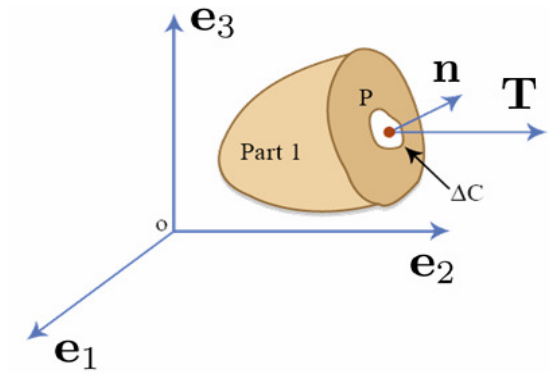

FIGURA 1

VECTOR TRACCIÓN EN UN ELEMENTO MATERIAL

Los *autovectores* del tensor de tensiones constituyen las *direcciones principales*, en las que las tensiones actuantes sobre un elemento cúbico son normales a sus caras. La magnitud de esas tensiones está dada por los autovalores del tensor, que siempre son reales, siendo esfuerzos de tracción, si estos son positivos, y de compresión si son negativos. Como las tensiones internas son las que producen la rotura del material, es fundamental conocer su distribución y sus valores máximos, para garantizar la integridad del cuerpo en estudio.

También es crítico conocer las direcciones principales en casos como las estructuras de materiales compuestos, donde un componente (fibras) absorbe principalmente esfuerzos de tracción [14]. La distribución de las fibras será más eficiente si éstas se alinean con las direcciones de tracción [Figura 2].

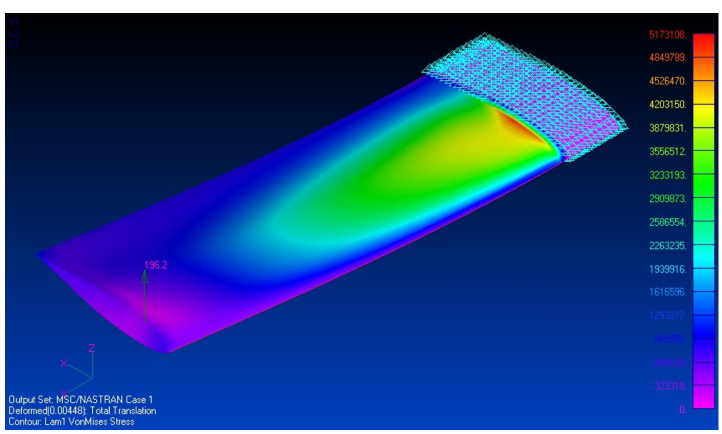

FIGURA 2

DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES EN UN SEGMENTO DE PALA DE HELICÓPTERO.

Dinámica de cuerpos rígidos

Caracterizar la configuración espacial de un cuerpo rígido respecto a un sistema de referencia requiere tres coordenadas lineales que describen la posición de un punto particular del cuerpo, y tres ángulos que describen su orientación. La evolución en el tiempo de estas seis magnitudes caracteriza completamente el movimiento, y está dada por dos ecuaciones diferenciales denominadas Ecuaciones Cardinales de la Dinámica [Figura 3] [11].

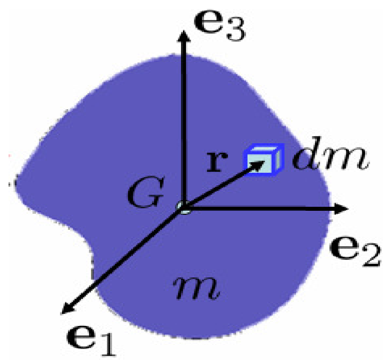

FIGURA 3

CUERPO RÍGIDO

Una de estas ecuaciones, concierne a los ángulos mencionados, y establece que la sumatoria de los vectores momento de las fuerzas exteriores respecto a un punto G del cuerpo, llamado centro de gravedad, es igual a la variación temporal del vector momento angular respecto de dicho punto. El vector momento angular está dado por un tensor de segundo orden, llamado de inercia, multiplicado por el vector velocidad angular. El tensor de inercia es entonces una transformación lineal que opera sobre el vector velocidad angular y arroja el vector momento angular. Este tensor caracteriza la distribución espacial de la masa de un cuerpo. Sus *autovectores* indican las direcciones de los llamados "*ejes principales de inercia*". Su importancia radica en el hecho de que si el momento ejercido por una fuerza exterior coincide en dirección con un eje principal de inercia, el vector aceleración angular resultante tiene la dirección de dicho eje. No se producen, así, aceleraciones angulares alrededor de los restantes ejes principales. Asimismo, los *autovalores* asociados a cada *autovector* son llamados *momentos principales de inercia*, e indican la inercia que el cuerpo exhibe frente a un cambio de velocidad angular alrededor del eje principal correspondiente [5].

La determinación de los ejes y momentos principales de inercia es de particular importancia en el diseño de satélites y sus sistemas de orientación [Figura 4].

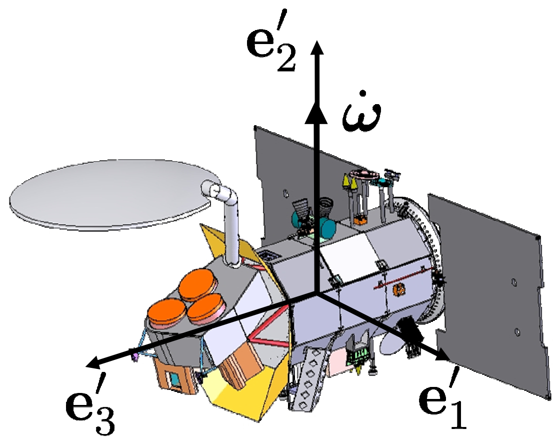

FIGURA 4

SATÉLITE Y SUS EJES PRINCIPALES DE INERCIA

Modos naturales de vibración de sistemas

En ingeniería, el estudio de las vibraciones tiene aplicación en la prevención de falla de estructuras (por tensión, fatiga, etc.) frente a las cargas dinámicas [12]. La dinámica de los cuerpos elásticos se estudia mediante la aplicación de ecuaciones diferenciales de todo tipo. En particular, cuando es posible obtener un modelo lineal del problema, la dinámica se puede representar por una ecuación diferencial lineal de segundo orden. De dicha ecuación es posible obtener las frecuencias naturales a las que el sistema oscila y las formas características que éste adopta durante la oscilación, denominadas "*modos de vibrar*" o "*forma modal*" [9].

Una simplificación de los problemas consiste en considerar que el cuerpo en estudio está conformado por muchos cuerpos discretos unidos por elementos elásticos discretos (resortes). Entonces, la ecuación matricial que gobierna la dinámica del sistema se transforma en un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden (1):

$$[M]\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\}+[K]\{x(t)\}=\{0\} \qquad (1)$$

donde {x(t)} es la posición de cada cuerpo, [M] es una matriz que reúne la masa y [K] resume las características elásticas del sistema de cuerpos. Las soluciones {x(t)} de este sistema de ecuaciones (1), serán funciones armónicas, de manera tal que operando algebraicamente se obtiene:

$$\left(-\omega^2[M]+[K]\right)\{x\}=\{0\} \qquad (2)$$

Buscamos los valores de ω que hacen que el sistema (2) tenga solución (problema de autovalores y autovectores). Los *autovalores* representan las pulsaciones o *frecuencias naturales* a las que vibra el sistema, mientras que los *autovectores* representan los *modos naturales de vibración* a la frecuencia natural asociada.

CONCLUSIONES

La experiencia fue atrayente para los alumnos. Se correspondió con las necesidades e intereses de éstos vinculado con los problemas propios de su futura actuación profesional. Nos manifestaron que la presentación, les resultó valiosa para saber que el Algebra Lineal tiene numerosas aplicaciones en la aeronáutica, los incentivó en aprender el tema, como así también que este tipo de iniciativas los "acercó" al Área Departamental Aeronáutica y a las materias específicas de la carrera. Para los profesores participantes fue un desafío explicar conceptos relativos a materias avanzadas a alumnos del Área Básica, poniendo acento en la utilización de las herramientas matemáticas que ellos estaban adquiriendo en el momento de la experiencia. Este ejercicio de unificación del saber científico, de reflexión sobre los saberes previos, abordando temas en común a distintas disciplinas, con el docente como vector interdisciplinario, fue beneficioso tanto para los alumnos como para los profesores.

La enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería debe contemplar no sólo el enseñar los conceptos, definiciones y teoremas propios de esta disciplina, sino también motivar al alumno, con diversas actividades, como ser el uso de tecnología, actividades colaborativas, prácticas de aplicación y articulación con las Áreas Tecnológicas, de modo que los alumnos adquieran las habilidades que se esperan para el desarrollo profesional de un Ingeniero. Por otra parte, es significativo hacerles notar a los alumnos, en las asignaturas básicas, la importancia de las herramientas matemáticas adquiridas, para el posterior aprendizaje de las asignaturas tecnológicas.

Como trabajo a futuro se prevé la repetición y actualización de esta presentación, con la realimentación obtenida a través de los comentarios de los alumnos, la incorporación en Matemática C de guías de resolución optativa con ejercicios prácticos adicionales con problemas de la especialidad Aeronáutica y la profundización de una acción recíproca entre los docentes de la Área Básica y del Área Aplicada.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido desarrollado dentro del marco del Proyecto acreditado por la Universidad Nacional de La Plata: “Nuevas tecnologías, competencias profesionales y educación científica. Estrategias didácticas para su articulación, 11/ I 110”.

REFERENCIAS

[1] Carlson, D., Teaching linear algebra: Must the fog always roll in? En D. Carlson, C. R. Jonson, D. C. Lay, A. D. Porter, A. Watkins y W. Watkins (comps.) Resources for the teaching of linear algebra, 1997, pp. 39-51. Washington, Estados Unidos: Mathematical Association of America.

[2] Carlson D., Johnson C. R., Lay D. C, A. Duane P., “The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Álgebra”, *The College Mathematics Journal*, Vol. 24, No 1, 1993, pp. 41-46.

[3] Chapetti M., *Mecánica de Materiales*, La Plata, Ediciones Al Margen, 2005.

[4] Dorier J.L., Teaching Linear Algebra at University, *Proceedings of the international congress of mathematicians*, ICM 2002, Pequín, China, Vol. III: Invited lectures. Beijing: Higher Education Press, 2002, pp 875-884.

[5] Fortescue P., Stark J., *Spacecraft systems engineering*, John Wiley & Sons, Inglaterra, 1995.

[6] Harel G., Two Dual Assertions: The First on Learning and The Second on Teaching (or Vice Versa). *American Mathematical Monthly,* 105 (6), 1998, pp 497-507.

[7] Harel G., Principles of Learning and Teaching Mathematics, With Particular Reference to the Learning and Teaching of Linear Algebra: Old and New Observations. In J-L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[8] Hiller J., Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. On the Teaching of Linear Algebra, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, 2000, pp. 191–207.

[9] James M.L., Smith G.M., Wolford J.C. y Whaley P.W., *Vibration of Mechanical and Structural Systems*, 2nd ed. Harper Collins Publ. 1994.

[10] Sierpinska A., Trgalova J.; Hillel J.; Dreyfus T., Teaching and Learning Linear Algebra with Cabri. Research Forum paper, Proceedings of PME 23, Haifa University, Israel, Vol 11, 1999, pp 119–134.

[11] Targ S. M., *Curso Breve de Mecánica Teórica*, 2da. edición. Editorial Mir, 1976.

[12] Thomson W., *Theory of Vibration with Applications*, 4th Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1993.

[13] Timoshenko S., *Teoría de la Elasticidad*, 2da. ed., Editorial Urmo, 1975.

[14] Tsai S. W.; Miravete A., *Diseño y análisis de materiales compuestos*, Editorial Reverté, 1988.

COPYRIGHT